

Matematica III

Esempio di prova scritta

CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni, A.A. 2021/2022

Esercizio 1. Si consideri il seguente sottoinsieme di \mathbb{R}^2 :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$

Dire (senza giustificare la risposta) se X è aperto, chiuso, limitato, convesso e indicarne $\overset{\circ}{X}$, ∂X , $D(X)$, \bar{X} .

Esercizio 2. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \cos(x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare l'esistenza della derivata dirizionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$$

al variare del versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

Esercizio 3. Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = |y - x| + x^2$$

ammette massimo e minimo assoluti nell'insieme $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. In caso affermativo determinarli.

Stabilire poi se la funzione ammette massimo e minimo assoluti in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 4. Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Calcolare

$$\iiint_D e^z dx dy dz .$$

Provare poi che

$$\iiint_D e^z dx dy dz > \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \arcsin^5(x) dx dy .$$